Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Eseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2009

■ Exercice Numéro 1 : (03,00 points)

Rappel : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit : $F = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad ; \quad (x,y) \in E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$

Soit : $G = \left\{ M(x,0) \in F \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^* \right\}$

Soit : $\forall\,(x,y)\,;\,(a,b) \in E \quad ; \quad (x,y) \perp (a,b) = \left(ax \;;\; bx + \frac{y}{a}\right)$

Soit l'application définie ainsi : $\varphi \; : \; (F,\times) \longmapsto (E,\perp)$

$$M(x,y) \longmapsto \varphi\big(M(x,y)\big) = (x,y)$$

0,25 **1 a** Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\times)$.

0,50 **b** Montrer que $(F,\times)$ est un groupe non commutatif.

1,00 **2** Montrer que G est un sous-groupe de $(F,\times)$.

0,25 **3 a** Calculer : $(1,1) \perp (2,3)$; $(2,3) \perp (1,1)$.

0,50 **b** Montrer que l'application φ est un isomorphisme.

0,50 **c** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(E,\perp)$.

■ Exercice Numéro 2 : (04,00 points)

I Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit : (E) : $z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$; $m \in \mathbb{C}\backslash\{\,1\,\}$

0,25 **1 a** Vérifier que le discriminant de (E) est : $\Delta = \big((1+i)(m-1)\big)^2$.

0,25 **b** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

0,50 **c** Écrire sous la forme algébrique les valeurs de m pour lesquelles on ait le produit des solutions de (E) soit égal à 1.

II Soient : $z_1 = 1 - im$; $z_2 = m - i$; $m = e^{i\theta}$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Soient : $M(m)$; $M_1(1-im)$; $M_2(m-i)$.

1,00 **1 a** Écrire z_1 ; z_2 sous la forme trigonométrique.

0,50 **b** Déterminer l'ensemble : $\left\{ M \in \mathcal{P} \;\; / \;\; M\,;\,M_1\,;\,M_2 \;\; colinéaires \right\}$

2 Soit l'application définie ainsi : $\mathcal{R}(\Omega,\psi) \; : \; (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$

$$M(z) \longmapsto M'(z' = 1 - iz)$$

0,50 **a** Montrer que $\mathcal{R}$ est une rotation, puis donner ses caractéristiques.

0,50 **b** Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathcal{Re}(m) + \mathfrak{I}m(m) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \epsilon \ i\mathbb{R}$$

0,50 **c** En déduire l'ensemble : $\left\{ M \epsilon \mathcal{P} \quad / \quad \Omega \,;\, M \,;\, M_1 \,;\, M_2 \ \ cocycliques \right\}$

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

On pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

0,25 **1** **a** Vérifier que a_n est un nombre pair pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 **b** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on ait $a_n \equiv 0\,[3]$.

2 Soit p un nombre premier positif et supérieur strictement à 3.

0,75 **a** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$; $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$; $6^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

0,75 **b** Montrer que le nombre p divise le nombre a_{p-2} .

0,50 **c** Montrer que : $(\forall\, q \,\epsilon\, \mathbb{P})\,;\,(\exists\, n \,\epsilon\, \mathbb{N})$; $a_n \wedge q = q$.

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

I Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall\, x > 0 \\ f_n(0) = 0 & ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

0,50 **1** **a** Montrer que la fonction f_n est continue en zéro.

0,25 **b** Étudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite en zéro.

1,00 **c** Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

1,00 **2** Étudier la monotonie des fonctions f_1 et f_2 .

0,25 **3** **a** Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

0,50 **b** Construire dans le repère $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

II Soit : $F(x) \coloneqq \displaystyle\int_{e^x}^{1} \left(\frac{f_1(t)}{1+t^2}\right) dt$; $\forall\, x \leq 0$

0,50 **1** **a** Montrer que la fonction F est dérivable sur $]-\infty,0[$ et que :

$$\forall\, x < 0 \quad ; \quad F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

0,25 **b** En déduire le sens des variations de la fonction F sur $]-\infty,0]$.

0,25 **2** **a** Montrer que : $\forall\, x < 0$; $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$